Αναλυτική Γεωμετρία 23/2/2016

Μάθημα 3ο

Ορισμός (βάση δ.χ)

Έστω E δ.χ υπεράνω ενός σώματος ($\pi.\chi.\ \mathbb{R}$) τα διανύσματα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι βάση του E αν:

(i) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(ii) τα $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ παράγουν το χώρο

π.χ

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,1), (0,1) \rangle$

Ορισμός (διάστασης)

Καλούμε διάσταση ενός χώρου E, το πλήθος των διανυσμάτων μια βάσης του.

- Συμβολισμός: dim

π.χ

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Παρατηρήσεις

Έστω E δ.χ και $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ μια βάση του ($\dim E = k$)

(1) Οποιαδήποτε διανύσματα μ επιλέξω στον E (όπου $\mu > k$)
$\Rightarrow$ αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα

(2) Αν $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_\lambda$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $E \Rightarrow \lambda \leq k$

(3) Αν $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_\lambda$ άλλη βάση του $E \Rightarrow k = \lambda$

(4) Σε χώρο διάστασης k, αν $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι γραμ. ανεξ. $\Rightarrow$ αυτά είναι βάση του E {δεν χρειάζεται να δείξω ότι παράγουν τον E}

π.χ

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,1), (0,1) \rangle$ Αρκει να δειξω οτι $(1,1)$, $(0,1)$ ειναι Γ.Α

$\lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ Οποτε Είναι Γ.Α

- Ενας 2ος τροπος για να βρουμε οτι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ είναι να παρω την οριζουσα.

Θεωρημα Steinitz

Εστω E ενας διανυσματικος χωρος ν και $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ είναι γραμμικά ανεξαρτητα διανυσματα $(k < \nu) \Rightarrow \exists\, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_\nu$ διανυσματα τετοια ωστε το συνολο $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_\nu\}$ είναι βαση του E

π.χ

Εστω τα διανυσματα $(1,-1,1)$, $(0,2,-1) \in \mathbb{R}^3$. Θελω να βρω μια βαση του $\mathbb{R}^3$ που να περιεχει αυτα τα διανυσματα

Τα διανυσματα αυτα είναι γραμμικά ανεξαρτητα δηλ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
{Το δειχνω με τον τροπου που εχανα στο πανω π.χ ↑ με $\lambda_1(\dots) + \lambda_2(\dots) = (0,0,0)$}

Επισης $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Αρκει να συμπληρωσω ακομη ενα αφου ο χωρος μου εχει $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ και εχει ηδη δυο. Απο τις προηγουμενες παρατηρησεις αρκεί να εχω Γ.Α διανυσματα (δεν χρειαζεται να δειξω οτι παραγουν τον χωρο)

Έστω $(a,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ ένα τέτοιο διάνυσμα $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ a & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

Αν π.χ $(a,\beta,\gamma) = (0,0,1)$ $\xrightarrow{\text{τότε}}$ $\det = 2 \neq 0$ $\xrightarrow{\text{τότε}}$ τα διανύσματα $(1,-1,1)$, $(0,2,-1)$, $(0,0,1)$ είναι Γ.Α στον $\mathbb{R}^3$ $\xrightarrow{\text{τότε}}$ είναι βάση

* k διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$ είναι Γ.Α $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$

Ορισμός (βαθμίδα)

Βαθμίδα ενός πίνακα A, είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις γραμμές διανύσματα (ή στήλες) του πίνακα

- Συμβολισμός: $r(A)$
$\downarrow$
rank

Σχόλιο

Ουσιαστικά πρόκειται για τον μέγιστο αριθμό Γρ. Ανεξ. διανυσμάτων γραμμών (ή στηλών) που μπορούμε να προσδιορίσουμε στον A.

Στοιχ. Πράξεις

(1) Ανταλλαγή 2 γραμμών / στηλών

(2) Πρόσθαφαίρεση σε μία γραμμή το πολλ. μιας άλλης

Θα φέρουμε τον A σε ανώτερα κλιμακωτή μορφή $\Rightarrow$ το πλήθος των μη-μηδενικών διανυσμάτων που μένουν είναι η βαθμίδα

Θεωρημα {εφαρμογη βαθμιδων ειναι ουσιαστικα}

Αν N ο χωρος λυσεων ενος ομογενους συστηματος $\Rightarrow$ $\dim N = \nu - r(A)$, οπου ν ο αριθμος των αγνωστων και A ο πινακας του συστηματος

π.χ

Να λυθει το συστημα
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - 3y + 6z - t = 0 \end{cases}$$

1ος τροπος:

Παιρνω τον πινακα
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Τον φερνω σε ισχυρα κλιμακωτη μορφη και δουλευω οπως στην γραμμικη Ι

2ος τροπος:

Υπολογιζουμε οτι $r(A) = 2$ {αφου $\exists \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ και ολες οι 3×3 οριζουσες $= 0$}

Απο το θεωρημα εχω $\dim N = \nu - r(A) = 4 - 2 = 2$ που σημαινει οτι τα x, y, z, t θα εκφραστουν με δυο εξισωσεις

Η οριζουσα μου προηλθε απο τις δυο πρωτες εξισωσεις οποτε ξεχνω τις αλλες δυο.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+4z-t=0 \\ x+z-t=0 \end{cases} \xrightarrow[t=\lambda]{z=\kappa} \begin{cases} 2x-3y=-4\kappa+\lambda & (1) \\ x=-\kappa+\lambda & (2) \end{cases}, \ \kappa,\lambda \in \mathbb{R}$$

η (1) λόγω (2) $\Rightarrow$ $2(-\kappa+\lambda)-3y=-4\kappa+\lambda \Rightarrow$

$-2\kappa+2\lambda+4\kappa-\lambda=3y \Rightarrow 3y=2\kappa+\lambda \Rightarrow y=\frac{2}{3}\kappa+\frac{1}{3}\lambda$

Οπότε $\begin{cases} x=-\kappa+\lambda \\ y=\frac{2}{3}\kappa+\frac{1}{3}\lambda \end{cases}, \ \kappa,\lambda \in \mathbb{R}$

! Θέτω τα z και t ότι θέλω γιατί έχω πάρει τις δυο πρώτες εξισώσεις οπότε τα z, t είναι ελεύθερα.

Ορίζουσες

1) Σε πίνακα 2x2

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta-\beta\gamma$$

2) Σε πίνακα 3x3

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

→ Επιλέγω όποιο στήλη ή γραμμή θέλω που να με βολεύει!

Ιδιοτητες Οριζουσων

(1) Αν μια οριζουσα εχει μηδενικη γραμμη (στηλη) $\Rightarrow$ Ειναι μηδεν

(2) Αν μια οριζουσα εχει δυο ιδιες γραμμες (στηλες) $\Rightarrow$ Ειναι μηδεν

(3) Αν σε πινακα Α αλλαξουμε θεση μεταξυ δυο γραμμων (στηλων) $\Rightarrow$ για τον Β που προκυπτει ισχυει $|B| = -|A|$

(4) Η οριζουσα δεν μεταβαλλεται αν προσθεσουμε σε μια γραμμη (στηλη) πολλαπλασιο της αλλης

(5) Αν πολλαπλασιασουμε γραμμη (στηλη) ενος Α πινακα με $\lambda \Rightarrow$
$|B| = \lambda |A|$

! Ο Α αντιστρεψιμος $\iff \det A \neq 0$

Σε αυτη τη περιπτωση $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

! Η οριζουσα εχει πολλαπλασιαστικη ιδιοτητα:
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

! Η οριζουσα δεν εχει προσθετικη ιδιοτητα